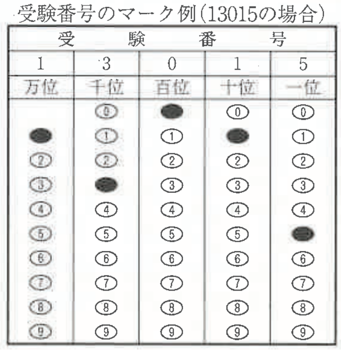
2025 M

数　　学

［**注意事項**］

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ，Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

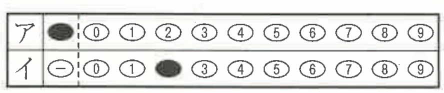
受験番号のマーク例（13015の場合）



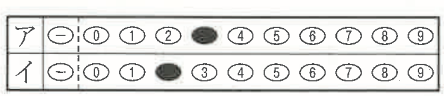
5. 問 Ⅰ，Ⅱ において，マークするときは，HB または B の黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。

7. マークで解答する場合，$\boxed{}$ の中の文字は，それぞれ符号（－）または，数字 1 文字などが対応している。例えば，$\boxed{アイ}$ の形の場合，－ 9 から － 1 の整数または 10 から 99 の整数が入り得る。

－2の場合



32の場合



8. 分数形で解答する場合，それ以上約分できない形で答えること。
9. 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。
10. 自然数の対数を含む形で解答する場合，真数に現れる自然数が最小となる形で答えること。たとえば，$\boxed{ア}$ log $\boxed{イ}$ に 4 log 3 と答えるべきところを 2 log 9 と答えてはいけない。

I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(1) 一般項が $a_n = 2^{n+3}3^{-n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，$a_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{ア}$ である。また，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{イウ}$ である。一般項が $b_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ について，$b_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{エオ}$ である。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(2) 四面体 OABC において，$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 60°$，$OA = 9$，$OB = 3$，$OC = 6$ である。点 P は辺 OA 上を，点 Q は辺 BC 上をそれぞれ独立に動く。このとき，線分 PQ を 2：1 に内分する点を R とする。

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}\ (0 \leqq s \leqq 1)$，$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}\ (0 \leqq t \leqq 1)$ とし，辺 OB を 2：1 に内分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{DR} = s\vec{k} + t\vec{l},\quad \vec{k} = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA},\quad \vec{l} = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OC} - \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OB}$$

と表され，点 R はある平面上を動くことがわかる。この平面を H とすると，

$|\vec{k}|^2 = \boxed{キ}$，$|\vec{l}|^2 = \boxed{クケ}$，$\vec{k} \cdot \vec{l} = \boxed{コ}$ より，平面 H 上で点 R が描く図形の面積は $\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シス}}$ である。

(3)　4次方程式 $P(x)=x^4-54x^2-40x+269=0$ を考える。

$x=y+b$ とおいたとき，$P(y+b)=y^4-4y^3-48y^2+64y+256$ となる定数 b の値は $b=$ $\boxed{アイ}$ である。さらに $y=az$ とおいて，$P(az+b)=cz^4-cz^3+dz^2+cz+c$ となるように定数 a を選ぶと $a=$ $\boxed{ウ}$ であり，このときの定数 c と d の値は $c=$ $\boxed{エオカ}$，$d=$ $\boxed{キクケコ}$ である。

方程式 $P(az+b)=0$ において，$t=z-\dfrac{1}{z}$ とおくと $t=\dfrac{\boxed{サ}\pm\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ である。

方程式 $P(x)=0$ の実数解のうちで最大のものは

$x=\sqrt{\boxed{セ}}+\sqrt{\boxed{ソタ}+\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}$ である。

(4)　次の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ に当てはまるものを，下の(A)～(D)から選べ。

(a)　実数 x について，$0<|x+2|-|x-1|<3$ は $-1<x<1$ であるための $\boxed{ア}$ 。

(b)　実数 x が有理数 a，b を用いて a^b と表せることは，x が有理数であるための $\boxed{イ}$ 。

(c)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することは，数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$ を満たすための $\boxed{ウ}$ 。

(d)　m，n，l を整数とする。$m^2+n^2+l^2$ が奇数であることは，$m+n+l$ が奇数であるための $\boxed{エ}$ 。

(A)　必要十分条件である
(B)　必要条件であるが，十分条件ではない
(C)　十分条件であるが，必要条件ではない
(D)　必要条件でも十分条件でもない

II $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ について，以下の(a)，(b)，(c)それぞれの場合における定数 a，b，c，d の値を求めよ。

(a) 3次関数 $f(x)$ は以下の条件(i)，(ii)を満たす。

条件(i)：$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=6x$ と3個の共有点 $(-2,-12)$，$(1,6)$，$(4,24)$ を持つ。
条件(ii)：$f(x)$ の $x=-2$ における微分係数が -3 である。

このとき，条件(i)より
$f(x)-6x=a\left(x+\boxed{ア}\right)\left(x-\boxed{イ}\right)\left(x-\boxed{ウ}\right)$
となる。ただし，$\boxed{イ}<\boxed{ウ}$ である。さらに，条件(ii)を考慮して
$a=\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$，$b=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$，$c=\boxed{ケ}$，$d=\boxed{コサ}$ を得る。

(b) 3次関数 $f(x)$ は以下の条件(i)，(ii)を満たす。

条件(i)：$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=6x$ と点 $(1,6)$ で接し，かつ共有点 $(4,24)$ を持つ。
条件(ii)：$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=6x-12$ と接する。

このとき，
$a=\boxed{シ}$，$b=\boxed{スセソ}$，$c=\boxed{タチ}$，$d=\boxed{ツテト}$ である。

(c) 3次関数 $f(x)$ は以下の条件(i)，(ii)を満たす。

条件(i)：$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=6x$ と点 $(1,6)$ で接し，他に共有点はない。
条件(ii)：$f(x)$ は $x=-3$ で極値をとる。

このとき，
$a=\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}$，$b=\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$，$c=\dfrac{\boxed{ハヒ}}{\boxed{フ}}$，$d=\dfrac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}$ である。

III 0以上の整数 n に対して

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+1}x\,dx$$

とする。

(1) I_0 を求めよ。

(2) $n\geqq 1$ のとき $I_n=(-1)^n\left(I_0+\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right)$ が成り立つことを数学的帰納法によって示せ。

(3) $\log 2=-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}$ を示せ。ただし，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，$0\leqq\tan x\leqq\dfrac{4}{\pi}x$ が成り立つことを用いてよい。