〈原　著〉

箱根駅伝におけるシード権獲得と繰り上げスタートに関する確率計算

廣津　信義*・仲村　　明**・金子今朝秋**

Probability calculation for obtaining a seed right and being forced an advanced start with a substitute sash in Hakone Ekiden

Nobuyoshi HIROTSU*, Akira NAKAMURA** and Kesatoki KANEKO**

Abstract

In this paper, we propose a method of probability calculation for obtaining a seed right and being forced an advanced start with a substitute sash in Hakone Ekiden, under the assumption that the race time of each runner follows a normal distribution. In terms of a seed right, we apply a reliability theory to estimate a cumulative distribution function for the required time of getting a seed. In terms of an advanced start, we estimate the probability density function using properties of normal distributions. We illustrate our method using data from the 88th Hakone Ekiden held in 2012, and show the relationship between the probability of getting a seed and each runner's standard deviation of race time. We also show the relationship between the probability of an advanced start being forced and the standard deviation at each station, etc.

Key words: ekiden, probability, reliability theory, seed, sash

1. はじめに

東京箱根間往復大学駅伝競走（箱根駅伝）は例年１月２日・３日の２日間にわたって行われる大学対抗の駅伝大会であり，初日に東京から箱根への往路５区間，２日目は箱根から東京への復路５区間の計10区間で競われている．昨今の人気の高まりに伴い，大会への出場争いについては熾烈を極めているが，大会に連続出場するためには，出場20チーム（19校＋学連選抜）の中で上位10位以内に入り次年度出場のためのシード権を確保しなければならない．シード権を逃した大学は予選会から参加し，40校を超える大学の中で上位９位（学連選抜の大会での順位によっては10位）に入る必要がある．近年，予選会も強豪校同士の争いとなっており勝ち抜きが厳しくなっているだけに，大会２日目の復路においては，優勝争いだけでなくシード権の確保も主要な争点となっている．ちなみに，順天堂大学は，第83回大会（平成18年）に総合優勝してからは，第84・85回大会ではシード権をとれず予選会を経て出場したが，第86・87回大会では予選落ちし，第88回大会の予選会で３年ぶりに出場権を獲得して大会でも総合７位となり，５年ぶりにシード権を獲得したという状況である．

このようなシード権争いに加えて，復路では襷が繋がるかどうかも見どころのひとつとなっている．これは，交通規制の関係上，中継所においてトップ

*　順天堂大学大学院スポーツ健康科学研究科
Graduate School of Health and Sports Science, Juntendo University
**　順天堂大学スポーツ健康科学部
School of Health and Sports Science, Juntendo University

から20分（往路の鶴見・戸塚両中継所では10分）以上引き離された場合には，次走者が「繰り上げスタート」となってしまい往路スタートから受け継いできた襷を繋ぐことができなくなるというものである．規定上は中継所の審判員の判断で行われるので，必ず繰り上げられるとは限らないが，例年，復路において戸塚中継所（８区終点・９区起点）と鶴見中継所（９区終点・10区起点）で繰り上げスタートとなるチームが出てくる．なお，繰り上げスタートという点では，往路でトップから10分以上遅れてゴールした場合は，襷は繋がっているものの，復路スタート時に繰り上げられトップから10分遅れで一斉スタートとなる．ちなみに，第88回大会（平成24年）では，東洋大学の独走となり往路８位以降の13チームが繰り上げの一斉スタートとなり，上武・東海・日本体育大学が戸塚中継所で，学連選抜が鶴見中継所で繰り上げスタートとなり，襷を繋ぐことができなかった．

さて，シード権を獲得するために必要となるタイム（以下，「シード権獲得タイム」）は，各選手の20キロ走の自己ベストなどを参考にして予想され，これらのデータに基づき各チームとも戦術を立てている．もし各選手のタイムが確定しているならば，各チームの10選手のタイムの和がそのまま総合タイムとなり，20チーム中10位となるチームの総合タイムがシード権獲得タイムとなる．しかしながら，現実には各選手のタイムはばらつくので，そのばらつきを考慮すると問題はやや複雑となり，シード権獲得タイムやシード権を獲得する確率は確率計算にて算出する必要がある．繰り上げスタートについても同様であり，もし各選手のタイムが確定しているならば，各チームの選手のタイム差を計算することで，繰り上げスタートとなるか否かの判断がつくが，各選手のタイムがばらつくという前提では，確率計算にて判定する必要がある．

各選手のタイムにばらつきがあるときの総合タイムの計算方法については，廣津・奥野[5]が例示している．彼らは，リレー競技において各選手の（確定した）タイムの合計を最短とするような選手選定だけでなく，各選手のタイムが独立な正規分布に従うという前提の下で最適解を求めるための数理的な一手法を提示し，ある目標タイムを実現する確率を最大化するという意味での最適な選手選定の方法を提示している．

また，箱根駅伝に関する確率計算としては，廣津ら[4]が予選会での予選通過に関する確率計算として，信頼性理論を適用することで，各選手のタイムが独立な正規分布に従うという前提の下での，各校のレースタイムの確率分布，予選通過タイムの確率分布ならびに予選通過確率を求めるための計算方法を提案している．本稿では予選会でなく本大会でのシード権獲得について信頼性理論を適用した確率計算の方法を示す．すなわち，各選手のタイムにばらつきがあるとき，シード権獲得タイムの確率分布，シード権を獲得する確率を求めるための計算方法を示す．さらに，復路で繰り上げの一斉スタートとなる確率や，各中継所で繰り上げスタートとなる確率計算の方法も併せて提示する．

具体的な計算事例として，平成24年１月２・３日に開催された第88回箱根駅伝のデータ[2]を基に，各選手の区間タイムが正規分布に従うという仮定の下で，その標準偏差を変えた時に，シード権を獲得する確率や繰り上げスタートとなる確率がどのように変わるかなどについての計算結果を示す．

現実の大会では，競技当日の選手の体調や天候・コース状況のみならず，相手選手との駆け引きなど複雑な要因が絡んでいる．このような現実との乖離は避けられないものの，本手法を用いると，区間における選手のタイムの予想値と標準偏差を設定すれば，各チームのシード権獲得タイムなどを数値的に把握できる．このような定量化は，現場で監督・コーチが独自の考えを織り込みながら判断していく上でのひとつの参考情報となると考えている．

本論文の構成は以下の通りである．第２節で，シード権獲得タイムの確率計算の方法，ならびに繰り上げスタートとなる確率の計算方法について述べる．第３節では，具体的な計算事例として，第88回箱根駅伝でのデータに基づく計算結果と考察につい

て述べる．第４節でまとめるとともに今後の研究課題についても触れる．

2．方　　法

本節では，各選手のタイムのばらつきを考慮した上での，シード権獲得と繰り上げスタートに関する確率計算の方法について説明する．

2.1　シード権獲得に関する確率計算

チーム i $(i=1, 2, \cdots, 20)$ の第 j 区（$j=1, 2, \cdots, 10$）に割り当てられた選手のタイム T_{ij} は，累積分布関数 $F_{ij}(t)=Pr(T_{ij}<t)$（確率密度関数 $f_{ij}(t)$）に従う確率変数であるとする．チーム i の総合タイム T_i は，各区間に割り当てられた選手のタイムの和となり，$T_i=T_{i1}+T_{i2}+\cdots+T_{i10}$ となる．T_i の累積分布関数を $F_i(t)=Pr(T_i \leqq t)=Pr(T_{i1}+T_{i2}+\cdots+T_{i10} \leqq t)$，確率密度関数を $f_i(t)$ と表記する．

ここで，各区間での選手のタイム T_{ij} がそれぞれ独立に平均 μ_{ij}，標準偏差 σ_{ij} の正規分布に従うと仮定する．正規分布の和の分布は正規分布になるという一般的な性質から，チーム i の総合タイム T_i はそれぞれ平均 $\sum_{j=1}^{10}\mu_{ij}$，標準偏差 $\sqrt{\sum_{j=1}^{10}\sigma_{ij}^2}$ の正規分布に従うこととなり，$F_i(t)$ は正規分布の累積分布関数となる．

ここで，$F_i(t)$（$i=1, \cdots, 20$）から，20チーム中の10位となるチームの総合タイムの累積分布関数 $F(t)$ は，信頼性理論[8)9)]の知見を用いて求めることができる．信頼性理論では，N 個の素子から構成されているシステムが，N 個中 k 個の素子が故障した時にシステムとして故障となる場合，k-out-of-N システムと呼ばれている．ここでは各素子の寿命を各チームのタイム T_i（$i=1, 2, \cdots, 20$）と考えることにより，20チーム中の10位となるチームの総合タイムは，10-out-of-20 システムとしての寿命で評価することができ，その累積分布関数を

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \prod_{i=1}^{20} F_i(t) \\
&\quad + \sum_{i\in\{1,2,\cdots,20\}} \left\{ (1-F_i(t)) \prod_{i\neq 1}^{20} F_j(t) \right\} \\
&\quad + \sum_{i,j\in\{1,2,\cdots,20\}} \left\{ (1-F_i(t))(1-F_j(t)) \times \prod_{k\neq i,j}^{20} F_k(t) \right\} \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l,m,n,o,p,q,r\in\{1,2,\cdots,20\}} \left\{ (1-F_i(t)) \times (1-F_j(t))(1-F_k(t))\cdots(1-F_q(t)) \times (1-F_r(t)) \prod_{s\neq i,j,k,l,m,n,o,p,q,r}^{20} F_s(t) \right\} \\
&= F_1(t)F_2(t)\cdots F_{20}(t) \\
&\quad + (1-F_1(t))F_2(t)\cdots F_{19}(t)F_{20}(t) + \cdots \\
&\quad + (1-F_{20}(t))F_1(t)F_2(t)\cdots F_{19}(t) \\
&\quad + (1-F_1(t))(1-F_2(t))F_3(t)\cdots F_{18}(t) \times F_{19}(t)F_{20}(t)) + \cdots \\
&\quad + (1-F_{19}(t))(1-F_{20}(t))F_1(t) \times F_2(t))F_3(t)\cdots F_{18}(t) \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + (1-F_1(t))(1-F_2(t))\cdots(1-F_{10}(t)) \times F_{11}(t)\cdots F_{20}(t) + \cdots \\
&\quad + (1-F_{11}(t))(1-F_{12}(t))\cdots \times (1-F_{20}(t))F_1(t)\cdots F_{10}(t)
\end{aligned} \tag{1}
$$

という計算により求めることができる．(1)式では20チームを対象とした計算となっているが，実質的には総合タイムの平均値が概ね15番目以降となるチームがシード権を獲得する可能性は小さくなるため，全20チームではなく平均値で15番目程度までを対象した計算により $F(t)$ は求まる．（なお，$F(t)$ の計算値については，対象チームを上位15～17チームとした場合について比較してみたところ，上位15チームと上位17チームとした場合の違いは概ね2％以下（標準偏差60秒のときの相対誤差）であった．）

チーム i がシード権を獲得する確率 P_i は，チーム i の総合タイム T_i の累積分布関数 $F_i(t)$ と，チーム i を除いた残りの19チームの中で10番目となるチームの総合タイムの累積分布関数 $F_{-i}(t)$ を利用して算出できる．すなわち，上述した 10-out-of-20 システムと同様の計算を，全チームではなくチーム

i を除いたチーム群を対象とした10-out-of-19システムについて行うことにより，その累積分布関数 $F_{-i}(t)$ が求まり，確率密度関数 $f_{-i}(t)$ が導出できる．時刻 t に着目すると，チーム i が総合タイム t を達成している確率は $F_i(t)=Pr(T_i \leqq t)$ となるので，この $F_i(t)$ と $f_{-i}(t)$ との積を t について0から∞で積分した

$$P_i=\int_0^\infty F_i(t)f_{-i}(t)\,dt \tag{2}$$

を計算することで，チーム i を除いたチーム群の中で10番目のチームよりもチーム i が勝る確率，すなわち，チーム i がシード権を獲得する確率 P_i を求めることができる．（なお，本研究では，$dt=1$ 秒として(2)式を数値積分することで，P_i を算出している．）

2.2　繰り上げスタートに関する確率計算

繰り上げスタートに関する確率計算については，繰り上げの基準となるトップチーム自体がレース中に入れ替わる可能性があることを考慮しなければならない．選手のタイムを正規分布として仮定した場合，どのチームもトップとなる可能性が0ではないため，全20チームすべてがトップになる可能性を持っている．しかしながら，本稿では計算を必要以上に煩雑にすることを避けるため，トップになりうるチームと，繰り上げスタートとなりうるチームを分けて検討する．本節では，トップになりうるチームとして1チームだけを対象とした場合について述べ，次いでトップになりうるチームとして2チーム対象とした場合に拡張する．繰り上げスタートとなりうるチームは5位以降の16チームを対象として計算する．

(1)　トップになりうるチームを1チームだけとした場合

まず，トップになりうるチームを1チームだけとした場合について，復路の一斉スタートに関わる繰り上げと，各中継所での繰り上げについて分けて説明する．

復路の一斉スタートに関わる繰り上げについては，そのトップチームと5区までの各チームの合計タイム（以下「往路タイム」）の差により判定すればよい．チーム i の往路タイムを T_i^{1-5} と表記すると，T_i^{1-5} は2.1節で示した仮定の下では

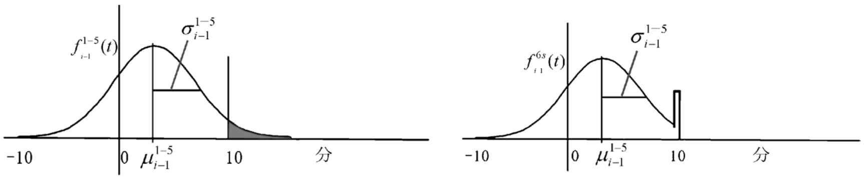
平均 $\sum_{j=1}^{5}\mu_{ij}$，標準偏差 $\sqrt{\sum_{j=1}^{5}\sigma_{ij}{}^2}$ の正規分布に従うこととなる．ここで，トップチームの往路タイムを T_1^{1-5} と表記すると，タイム差 $T_i^{1-5}-T_1^{1-5}$ が10分を超える確率 $Pr\{T_i^{1-5}-T_1^{1-5}>10分\}$ が，復路で一斉スタートに繰り上げられる確率となる．正規分布の差の分布も正規分布になるという一般的な性質から，このタイム差 $T_i^{1-5}-T_1^{1-5}$ は，

$$平均\quad \mu_{i-1}^{1-5}=\sum_{j=1}^{5}\mu_{ij}-\sum_{j=1}^{5}\mu_{1j}$$

$$標準偏差\quad \sigma_{i-1}^{1-5}=\sqrt{\sum_{j=1}^{5}\sigma_{ij}{}^2+\sum_{j=1}^{5}\sigma_{1j}{}^2}$$

の正規分布となり，$Pr\{T_i^{1-5}-T_1^{1-5}>10分\}$ を求めることができる．

復路スタート時はトップチームとのタイム差が10分未満の時は繰り上げられないので，復路スタート時（6区起点）のチーム i とトップチームとのタイム差の確率密度関数 $f_{i-1}^{6s}(t)$ は，10分未満の部分についてはこの正規分布と等しくなり，$t=10$分の時は $F_1{}^{6s}(t=10分)=Pr\{T_i^{1-5}-T_1^{1-5}>10分\}$ となる．



(a)往路タイム差（5区終点でのタイム差）　　(b)復路スタート時（6区起点）でのタイム差

図1　復路一斉スタートに関するチーム i とトップチームとのタイム差の確率密度関数のイメージ

これをイメージとして表すと図1のようになる．

次に，中継所での繰り上げスタートについて説明する．ここでは6区終点（7区起点）となる小田原中継所について述べるが，他の中継所についても同様に計算することができる．復路スタート時（6区起点）でのタイム差は一斉スタートがありうるため，図1(b)に示したように正規分布とならない．そこで，6区終点でのタイム差は，復路スタート時（6区起点）のタイム差と第6区の走者のタイム差から次のような畳み込み計算[1)7)]により求める必要がある．すなわち，6区起点のタイム差 T_{i-1}^{6s} と6区のタイム差 T_{i-1}^{6} の和が6区終点でのタイム差 $T_{i-1}^{6e}=T_{i-1}^{6s}+T_{i-1}^{6}$ となるので，その累積分布関数 $F_{i-1}^{6e}(t)$ は，選手のタイムが独立と仮定していることから，T_{i-1}^{6s} と T_{i-1}^{6} が独立となり

$$\begin{aligned}F_{i-1}^{6e}(t)&=Pr(T_{i-1}^{6e}\leqq t)\\&=Pr(T_{i-1}^{6s}+T_{i-1}^{6}\leqq t)\\&=\iint_{t_1+t_2\leq t}f_{i-1}^{6}(t_1)f_{i-1}^{6s}(t_2)\,dt_1dt_2\end{aligned}\qquad(3)$$

と畳み込み積分で表現できる．ただし，T_{i-1}^{6s} と T_{i-1}^{6} の確率密度関数をそれぞれ $f_{i-1}^{6s}(t)$，$f_{i-1}^{6}(t)$ で表している．この計算のイメージを図示すると図2のようになる．

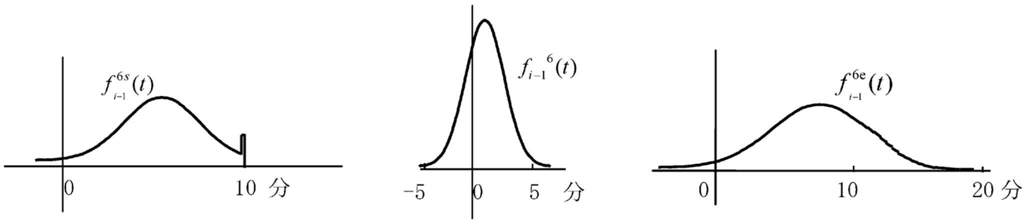
(3)式は，確率密度関数 $f_j(t)$ を離散分布として表現することで，数値計算することができる．ここでは，廣津ら[3)]が示している離散化と高速フーリエ変換を利用した計算手法を用いて，(3)式の畳み込み積分を総和を使った畳み込み和として計算した．このようにして計算した6区終点でのタイム差を表す確率密度関数 $f_{i-1}^{6e}(t)$ を利用してタイム差が20分を超える確率を求めることで，6区終点（7区起点）となる小田原中継所で繰り上げスタートとなる確率を求めることができる．

7区終点（8区起点）での繰り上げについても同様に，7区起点でのタイム差の分布と7区のタイム差の分布から，7区終点のタイム差の分布を計算することで求めることができる．ただし，確率計算にあたっては，繰り上げスタートとなるか否かは排反事象であることを利用して，(7区で途中棄権がないという前提で)「7区起点で通常スタートとなる（繰り上げスタートではない）確率」=「7区終点（8区起点）で繰り上げスタートとなる確率」+「7区終点（8区起点）で通常スタートとなる（繰り上げスタートとならない）確率」が成り立つことに留意して，ある区間の終点で繰り上げスタートになった際，それ以降の繰り上げスタートは新たにカウントしないようにする必要がある．このような計算を9区終点まで行うことで，復路で繰り上げスタートが起こる確率を求めることができる．

(2)　トップになりうるチームが複数ある場合

ここまでは，繰り上げスタートについて，トップになりうるチームを1チームだけとした場合について述べた．第88回大会では東洋大学の独走となり復路でトップの入れ替わりはなかったが，通常はしばしば入れ替わりが見られる．ここでは，トップになりうるチームが複数ある場合として，2チームの場合を説明するが，3チーム以上の場合についても同様の考え方を用いて拡張できる．

まず復路での一斉スタートについては，トップになりうる2チームをチーム1・チーム2としそれぞ



(a)復路スタート時（6区起点）の分布　(b)6区でのタイム差の分布　(c)6区終点での分布

図2　中継所での繰り上げスタートに関するチーム i とトップチームとのタイム差の確率分布の計算のイメージ

れの往路タイムを T_1^{1-5}，T_2^{1-5} とすると，チーム i の繰り上げについてはチーム1とのタイム差 $T_i^{1-5}-T_1^{1-5}$ だけでなくチーム2とのタイム差 $T_i^{1-5}-T_2^{1-5}$ も考慮する必要がある．正規分布の差の分布も正規分布になるという一般的な性質から，タイム差 $T_i^{1-5}-T_1^{1-5}$，$T_i^{1-5}-T_2^{1-5}$ の分布は，2次元正規分布で表すことができ，$X=T_i^{1-5}-T_1^{1-5}$，$Y=T_i^{1-5}-T_2^{1-5}$ とおくと，その平均，分散，相関係数は，

平均　$\mu_x=\sum_{j=1}^{5}\mu_{ij}-\sum_{j=1}^{5}\mu_{1j}$　$\mu_y=\sum_{j=1}^{5}\mu_{ij}-\sum_{j=1}^{5}\mu_{2j}$

分散　${\sigma_x}^2=\sum_{j=1}^{5}{\sigma_{ij}}^2+\sum_{j=1}^{5}{\sigma_{1j}}^2$　${\sigma_y}^2=\sum_{j=1}^{5}{\sigma_{ij}}^2+\sum_{j=1}^{5}{\sigma_{2j}}^2$

相関係数　$\rho=0.5$

となる[7)]．

復路での一斉スタートは，2チームのいずれかと10分以上タイム差があったら起こりうるので，2次元正規分布において，{$X>10$分}ないしは{$Y>10$分}となる確率を求めればよい．2次元正規分布のイメージを図3にて表すと，繰り上げスタートとなる確率は，図中の薄塗部にて示される{$X>10$分}ないしは{$Y>10$分}の領域について，2次元正規分布の確率密度関数と $x-y$ 平面とで囲まれる空間の体積で表される．復路スタート時の確率密度関数は，{$X<10$分}かつ{$Y<10$分}のときは，一斉スタートに繰り上げとならないので，2次元正規分布の確率密度関数と等しくなるが，{$X>10$分}ないしは{$Y>10$分}のときは，繰り上げとなる．繰り上げられた際には，$x-y$ 平面上で{$x=10$分}ないしは{$y=10$分}にあたる線分上の点のいずれかに繰り上げられることとなる．イメージとしては，図3で薄塗部にある点Pは，$T_i^{1-5}-T_2^{1-5}<T_i^{1-5}-T_1^{1-5}$ すなわち $T_1^{1-5}<T_2^{1-5}$ の領域にあるため，チーム1を対象として $T_i^{1-5}-T_1^{1-5}-10$分だけ繰り上げられ，チーム1とのタイム差は10分になる．その際，チーム2とのタイム差も $T_i^{1-5}-T_1^{1-5}-10$分だけ短縮されることになり，$T_i^{1-5}-T_2^{1-5}-(T_i^{1-5}-T_1^{1-5}-10)=10-(T_2^{1-5}-T_1^{1-5})$ 分となる．図3では，点PはPを通る傾き1（45°）の直線上にある点P′に移ることとなり，P′ではチーム1とのタイム差が10分，チーム2とのタイム差が $10-(T_2^{1-5}-T_1^{1-5})$ 分となっている．ちなみに，トップとなりうる2チームが同タイム（$T_1^{1-5}=T_2^{1-5}$）のときは，このような点は $x-y$ 平面上で原点を通る傾き1の直線上に位置することとなる．トップとなりうる2チーム同士のタイム差

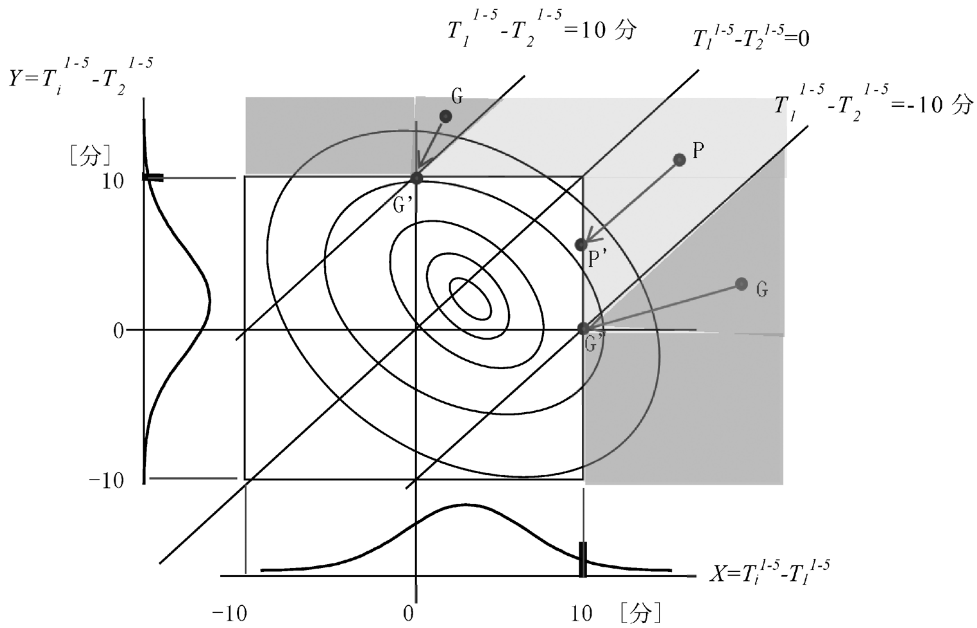


図3　5区終点（6区起点）での2次元正規分布を利用した繰り上げに関する確率計算のイメージ

が10分以上となることは極めて起こりくいが，図3では薄塗部の中でもやや濃い部分で表しており，その領域内にある点Gは，一斉スタートに繰り上げられた際に点G′に移ることとなる．

トップとなりうるチームを2チームとした場合の中継所での繰り上げスタートについても，1チームとした場合と同様に小田原中継所を例に説明する．6区終点でのタイム差は，繰り上げによる一斉スタートがあるため2次元正規分布とはならない．そこで，復路スタート時（6区起点）のタイム差と第6区の走者のタイム差を利用して求める必要がある．すなわち，6区起点のチーム1，2に対するタイム差 T^{6s}_{i-1}，T^{6s}_{i-2} と6区におけるチーム1，2に対するタイム差T^{6}_{i-1}，T^{6}_{i-2} の和が6区終点でのチーム1，2それぞれとのタイム差 $T^{6e}_{i-1}=T^{6s}_{i-1}+T^{6}_{i-1}$，$T^{6e}_{i-2}=T^{6s}_{i-2}+T^{6}_{i-2}$ となるので，T^{6e}_{i-1} と T^{6e}_{i-2} の2次元累積分布関数 $F^{6e}_{i-1,\,i-2}(s,\,t)$は，

$$\begin{aligned}F^{6e}_{i-1,\,i-2}(s,\,t)&=Pr(T^{6e}_{i-1}\leqq s,\,T^{6e}_{i-2}\leqq t)\\&=Pr(T^{6s}_{i-1}+T^{6}_{i-1}\leqq s,\\&\qquad T^{6s}_{i-2}+T^{6}_{i-2}\leqq t)\\&=\iiint\int_{u_1+u_2\leq s,\,v_1+v_2\leq t}f^{6s}_{i-1}(u_1,\,v_1)\\&\qquad\times f^{6}_{i-1}(u_2,\,v_2)\,du_1dv_1du_2v_2\end{aligned}\quad(4)$$

となる．

(4)式は $F^{6e}_{i-1,\,i-2}(s,\,t)$の確率密度関数$f^{6e}_{i-1,\,i-2}(s,\,t)$を離散分布として表現し，2次元高速フーリエ変換[6]を利用することで数値計算できる．このようにして求めた6区終点でのタイム差を表す確率密度関数においてチーム1ないしは2のいずれかとのタイム差が20分を超える確率を求めることで，6区終点（7区起点）となる小田原中継所で繰り上げスタートとなる確率を求めることができる．

7区終点以降についても，1チームを対象とした場合と同様の考え方を2次元に拡張することで，2チームを対象とした場合の繰り上げスタートとなる確率を求めることができる．

3.　結果と考察

第2節で述べた方法を平成24年1月2・3日に開催された第88回箱根駅伝に関するデータ[2]に適用した結果を計算事例として示す．ただし，ここではチームiの第j区の選手のタイムの分布の平均μ_{ij}については，実際の選手のタイムを予測値として代用することで，平均に関する予測のずれの影響はないという状況での，選手のタイムのばらつきと各種確率の関係を示すこととした．また選手のタイムのばらつきを表す標準偏差σ_{ij}についても，ここでは全選手を一律に評価し（$\sigma_{ij}=\sigma$），$\sigma=0$～60秒にて設定を変えてみることで，シード権を獲得する確率や繰り上げスタートとなる確率がどのようになるか計算してみた．参考までに第88回箱根駅伝の各チームの総合成績を表1に示す．

表1　第88回箱根駅伝の総合成績

順位	チーム	総合タイム	順位	チーム	総合タイム
1	東洋大学	10:51:36	11	国士舘大学	11:16:47
2	駒澤大学	11:00:38	12	東海大学	11:17:14
3	明治大学	11:02:50	13	帝京大学	11:18:58
4	早稲田大学	11:03:10	14	拓殖大学	11:20:21
5	青山学院大学	11:08:46	15	神奈川大学	11:20:22
6	城西大学	11:10:17	16	上武大学	11:20:43
7	順天堂大学	11:11:15	17	学連選抜	11:21:36
8	中央大学	11:11:17	18	中央学院大学	11:21:41
9	山梨学院大学	11:12:38	19	日本体育大学	11:22:26
10	國學院大學	11:13:42	20	東京農業大学	11:44:16

3.1　シード権を獲得する確率の計算

まず，選手のタイムの標準偏差σ_{ij}を40秒にしたときの下位3チームを除く17チームの総合タイムの累積分布関数とシード権獲得タイムの計算結果を図4に示す．ちなみに40秒は箱根駅伝では選手の区間タイムの概ね1％にあたり，各選手の調子のばらつき具合の目安の一つとされている値である．

図4では選手のタイムの標準偏差を40秒の場合しか示していないが，標準偏差の値を大きくすると，図中の曲線の傾きがよりなだらかになっていき，標準偏差の値を小さくするとより急になる．言うまでもなく，標準偏差0のときは各チームにおけるタイムのばらつきはなくなる．(1)式にて求められるシード権獲得タイムの累積分布関数の計算結果は，

図4内に破線で示されており，10位の國學院大學の総合タイムの分布の近くに位置していることがわかる．

(2)式にて求められるシード権を獲得する確率の

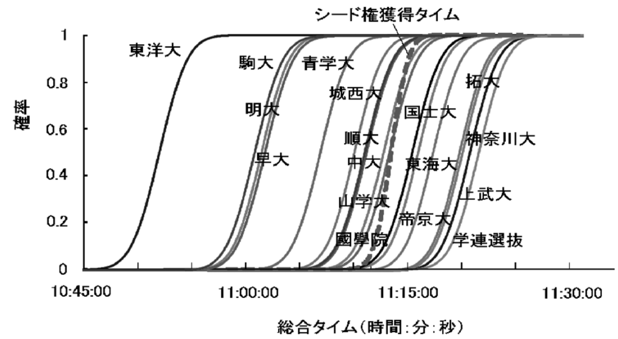


図4 総合タイムの累積分布関数（$\sigma_{ij}=40$秒）

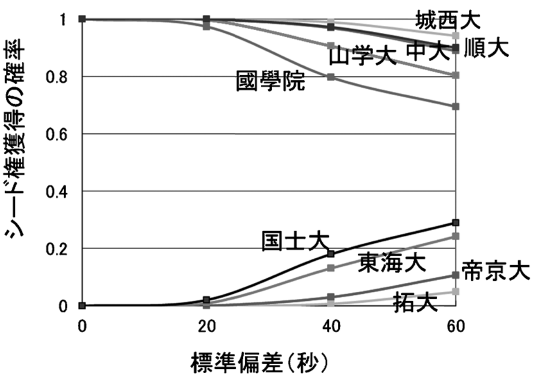


図5 選手のタイムの標準偏差とシード権を獲得する確率との関係

計算結果を図5に示す．図5より，選手のタイムの標準偏差が大きくなるに従い，9位の山梨学院大学や10位の國學院大学などの10位以内のチームのシード権を獲得する確率は低下していくが，逆に11位の国士舘大学や12位の東海大学など11位以降の大学にとっての確率は上昇する様子が定量的に示されている．第88回大会では10位と11位に総合タイムで差が3分以上あったため，標準偏差60秒でも，10位の國學院大学と11位の国士舘大学のシード権を獲得する確率の違いは0.4も開いている．

3.2 繰り上げスタートとなる確率の計算

(1) トップになりうるチームを1チームだけとした場合

トップになりうるチームを1チームだけとした場合について，復路スタート時に繰り上げの一斉スタートとなる確率の計算結果を図6に示す．図6では横軸は往路の順位（5位以降）に従って並んでおり，標準偏差が0秒，20秒，40秒，60秒の4つの場合について，各チームが一斉スタートに繰り上げられる確率を折れ線で示している．往路7位の青学大までは1位の東洋大とタイム差が10分以内であったので，標準偏差0秒（$\sigma=0$秒）のグラフでは，7位までは繰り上げスタートとなる確率は0となっており，8位以降は確率が1となっている．標準偏差の増加に伴い，往路タイムのばらつきは大きくなり，往路7位までのチームも繰り上げの一斉スター

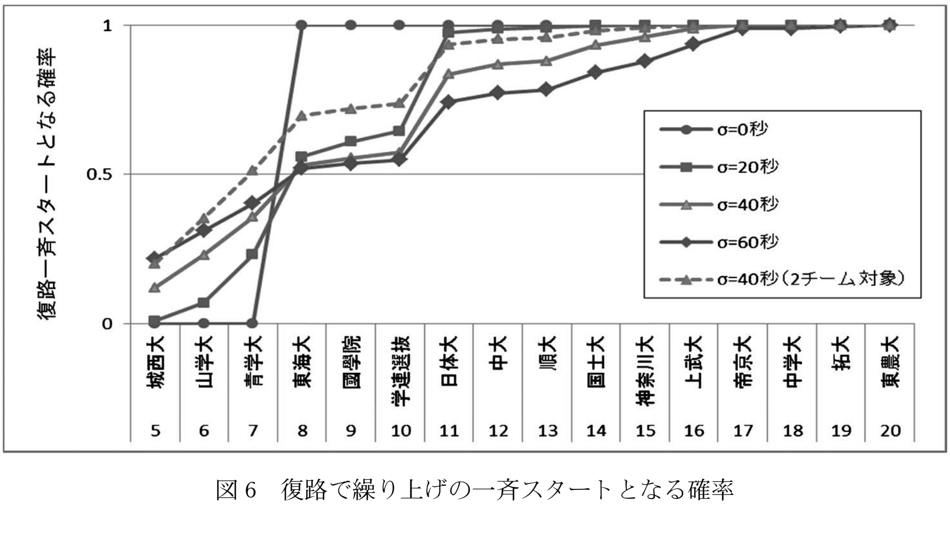


図6 復路で繰り上げの一斉スタートとなる確率

トとなる可能性が出てくる．逆に８位以降のチームは繰り上げの一斉スタートとならない可能性がでてくるので，確率が１から減少する．このような傾向が図６のグラフで表現されている．

表２には復路での各中継所での繰り上げスタートの計算結果を示している．表２ではチームは復路の成績の順に並んでおり，標準偏差が20秒，40秒，60秒の3つの場合について，それぞれのチームが各中継所でトップと20分差をつけられて繰り上げスタートとなる確率を表記している．計算の結果としては，まず小田原・平塚中継所では標準偏差を60秒（σ＝60秒）としても繰り上げとなる確率が0.1以下と小さいことがわかる．また，この大会では復路では往路８位以降（13チーム）が一斉スタートに繰り上げとなり，繰り上げられなかった往路５〜7位の城西・山梨学院・青山学院大学も一斉スタートとのタイム差が２分半もなかったため，復路タイムの順位が下がるほど，繰り上げとなる確率が概ね増加していく傾向が見られる．

本大会では，実際には戸塚中継所で上武・東海・日本体育大学が，鶴見中継所で学連選抜が繰り上げスタートとなったが，計算上は例えば，標準偏差が20秒のときには，戸塚中継所で上武・東海・日本体育大学が繰り上げスタートとなる確率はそれぞれ0.77，0.59，0.93であり，鶴見中継所では学連選抜が確率0.99で繰り上げられることが分かる．標準偏差が大きくなると，実際に繰り上げスタートとなった上武・東海・日本体育・学連選抜の確率は小さくなるが，それ以外のチームは，繰り上げスタートとなる確率が増加するという傾向が数値的に示されている．

⑵　トップになりうるチームが複数ある場合

トップとなりうるチームを東洋大学の１チームとした場合の計算結果は以上の通りであるが，トップになりうるチームを２チームとした場合の計算結果については，第88回大会では東洋大学が独走し２位の駒澤大学に10分近くものタイム差をつけたため，東洋大学と駒澤大学の２チームをトップになりうるチームとした場合と，東洋大学１チームだけとした

表２　復路にて各中継所で繰り上げスタートとなる確率

標準偏差		σ＝20秒				σ＝40秒				σ＝60秒				σ＝40秒（２チーム対象）			
中継所		小田原（6区終点）	平塚（7区終点）	戸塚（8区終点）	鶴見（9区終点）	小田原（6区終点）	平塚（7区終点）	戸塚（8区終点）	鶴見（9区終点）	小田原（6区終点）	平塚（7区終点）	戸塚（8区終点）	鶴見（9区終点）	小田原（6区終点）	平塚（7区終点）	戸塚（8区終点）	鶴見（9区終点）
復路順位	チーム																
5	順大	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.05	0.03	0.00	0.00	0.01	0.01
6	中大	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.02	0.08	0.00	0.00	0.00	0.04
7	青学大	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
8	帝京大	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.00	0.00	0.08	0.05	0.00	0.00	0.02	0.02
9	拓大	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.03	0.16	0.00	0.00	0.11	0.18	0.00	0.00	0.04	0.19
10	城西大	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.01	0.10	0.00	0.00	0.00	0.08
11	東農大	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00	0.01	0.13	0.00	0.00	0.00	0.10
12	國學院	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.05	0.09	0.00	0.00	0.12	0.10	0.00	0.00	0.08	0.12
13	国士大	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.07	0.13	0.00	0.00	0.15	0.13	0.00	0.00	0.08	0.16
14	山学大	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.07	0.10	0.00	0.01	0.12	0.10	0.00	0.00	0.11	0.14
15	中学大	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.04	0.30	0.00	0.00	0.11	0.27	0.00	0.00	0.04	0.34
16	上武大	0.00	0.00	0.77	0.07	0.00	0.02	0.62	0.08	0.00	0.09	0.49	0.08	0.00	0.03	0.67	0.08
17	神奈川大	0.00	0.00	0.00	0.49	0.00	0.00	0.08	0.41	0.00	0.01	0.16	0.31	0.00	0.00	0.09	0.46
18	東海大	0.00	0.00	0.59	0.27	0.00	0.00	0.47	0.19	0.00	0.01	0.42	0.15	0.00	0.00	0.59	0.19
19	日体大	0.00	0.00	0.93	0.07	0.00	0.03	0.71	0.26	0.00	0.09	0.53	0.33	0.00	0.04	0.78	0.18
20	学連選抜	0.00	0.00	0.00	0.99	0.00	0.00	0.06	0.83	0.00	0.00	0.13	0.63	0.00	0.00	0.09	0.87

場合とで計算結果で違いはほとんどみられなかった．

そこで，2チームを対象とした場合の例としては，選手のタイムが東洋大学と同じ分布をもつチームがもう1チームあると想定して，その2チームを対象とした場合の繰り上げの確率を計算してみた．標準偏差を40秒とした場合について，復路で一斉スタートに繰り上げられる確率の計算結果を図6で「$\sigma=40$秒（2チーム対象）」が示すグラフに，各中継所で繰り上げられる確率の計算結果を表2で「$\sigma=40$秒（2チーム対象）」の欄に示している．図6では，1チーム対象の標準偏差40秒のグラフと比較して，2チームを対象とした場合は，一斉スタートに繰り上げられる確率が増加し，特に13位以内のチームについては概ね0.1前後増加するという結果となっている．また，各中継所での繰り上げスタートとなる確率についても，1チーム対象の標準偏差40秒の場合の確率と比較して，2チームを対象とした場合は0.01～0.1程度増加するという結果となっている．

4. おわりに

本稿では箱根駅伝について，各選手のタイムにばらつきを考慮し，各チームのシード権獲得タイムの確率分布ならびにシード権を獲得する確率を求めるための計算方法を示した．さらに，復路で繰り上げの一斉スタートとなる確率や，各中継所で繰り上げスタートとなる確率計算の方法も提示した．計算事例として，第88回箱根駅伝予選会のデータを基に，選手のタイムの標準偏差を0～60秒で設定した時のシード権獲得タイムやシード権を獲得する確率，復路で繰り上げの一斉スタートとなる確率や各中継所で繰り上げスタートとなる確率をトップとなりうるチームが1チームの場合と，複数の2チームある場合について算出した．

今回は，選手のタイムが正規分布に従うという前提で計算を行ったが，正規分布以外の任意の分布を仮定しても，高速フーリエ変換を利用した確率計算[3)]を行うことで，同様の分析を行うことは可能である．ただし，どのような分布を仮定することがよいのかを決定するためにはさらに研究を進めていく必要があると考えている．また，選手間のタイムの独立性について，共分散を考慮したモデルを導入して検討したりしていくことも興味ある問題であると思われる．今後とも，数理的手法が競技現場で監督・コーチの意思決定に役立ち活用されるように発展させるべく工夫を重ねていきたいと考えている．

5. 謝　辞

本研究は，文科省科学研究費補助金基盤研究(C)課題番号 21510159 の助成を受け実施した．

文　献

1) 伏見正則（1987）確率と確率過程，東京，講談社．
2) 箱根駅伝公式 Web：http://www.hakone-ekiden.jp/
3) 廣津信義，仲村　明，金子今朝秋（2011）リレー競技の走者の選定に関する数理的手法―タイムの予想分布を任意に想定した際の目標達成確率の計算方法―．順天堂スポーツ健康科学研究，3(1), 9–18.
4) 廣津信義，仲村　明，金子今朝秋（2012）箱根駅伝予選会での予選通過に関する確率計算．オペレーションズ・リサーチ，57(1), 5–10.
5) 廣津信義，奥野　浩（2007）リレー競技の走者の選定に関する数理的一手法．順天堂大学スポーツ健康科学研究，11, 1–9.
6) 伊東一良(編)（2009）原理がわかる・現場で使える信号処理．東京，丸善．
7) 宮川雅巳（1998）統計技法．東京，共立出版．
8) 森　雅夫，宮沢政清，生田誠三，森　戸晋，山田善靖（1989）オペレーションズリサーチⅡ．東京，朝倉書店．
9) 尾崎俊治（1996）確率モデル入門，東京，朝倉書店．

（平成24年6月26日　受付）
（平成24年8月9日　受理）